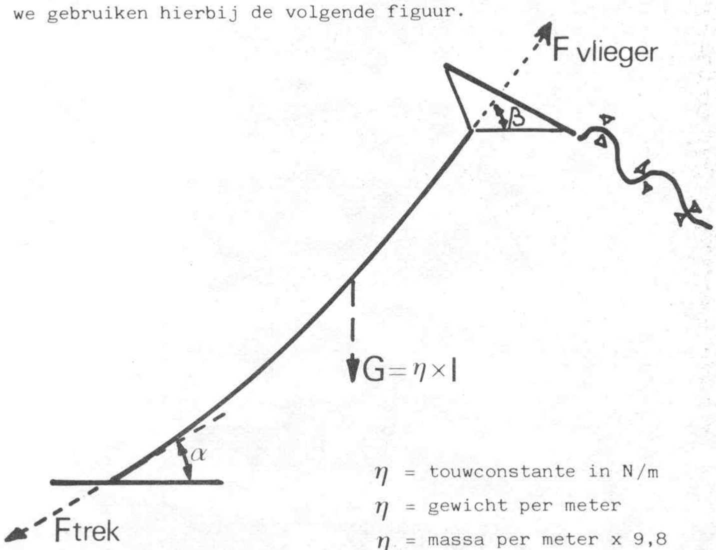
hoe hoog, hoe ver?

Iedere lijn die tussen twee krachten vrij is opgehangen in de ruimte en waarop verder alleen nog de zwaartekracht werkt, voldoet aan de zogenaamde kettinglijn of catenaria, de vergelijking van deze lijn luidt als volgt:

$$y = a \cosh \frac{x}{a} .$$

We kunnen m.b.v. deze vergelijking enkele nuttige dingen voor vliegeraars berekenen die het gewicht van hun touw niet verwaarloosbaar vinden.
In de hoofdvergelijking vinden we een boog constante a, we zullen deze constante eerst omrekenen naar de vliegerwereld, we gebruiken hierbij de volgende figuur.



η = touwconstante in N/m
η = gewicht per meter
η = massa per meter x 9,8 m/s^2

We bepalen eerst η door de haspel met touw op de weegschaal te leggen en de aangewezen massa te noteren, nu wikkelen we de haspel af b.v. door de vlieger op te laten en wegen de massa van de lege haspel. We berekenen nu:

$$\eta = \frac{\text{massa haspel + touw - massa haspel}}{\text{lengte van het touw}} \times 9{,}8 \text{ in N/m} .$$

We kunnen nu de constante a met behulp van een meting bepalen, overigens a is afhankelijk van de windsnelheid en van de vlieger, dus de procedure om a te bepalen zal bij iedere windsnelheid uitgevoerd moeten worden.
We laten een vlieger op met een bekende lengte touw b.v. 100m. Wanneer de vlieger staat meten we m.b.v. een geodriehoek, de hoek α en meten met b.v. een veerunster de trekkracht F (wanneer het veerunster in kg geijkt is moet men de aangewezen massa vermenigvuldigen met 9,8 N/kg om de trekkracht te krijgen), nu geldt voor a:

$$a = \frac{F \cos\alpha}{\eta} ,$$ de eenheid van a is in meters.

Verder berekenen we uit de meetgegevens de hoek β, dit gaat als volgt:

$$\tan\beta = \frac{1}{a} + \tan\alpha$$

Het is overigens interessant om te weten dat $\tan\beta$ bij een bepaalde windsnelheid iets zegt over de lift/drift verhouding van de vlieger n.l.:

$$\tan\beta = \frac{\text{F lift - gewicht vlieger}}{\text{F drift}}$$

maar dit terzijde. We kunnen nu de hoogte van de vlieger bij deze touwlengte berekenen

$$\text{hoogte} = h = a\left(\frac{1}{\cos\beta} - \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

Nu we de gegevens van a en β hebben berekend kunnen we deze ook voor andere hoeken α toepassen mits de windsnelheid bij de vlieger maar niet verandert. Willen we de touwlengte en de hoogte berekenen bij een willekeurige hoek α ($0° \leq \alpha \leq 90°$) dan geldt:

$$l = a\,(\tan\beta - \tan\alpha)$$

$$h = a\left(\frac{1}{\cos\beta} - \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

Deze formules gaan over in de limietstand wanneer $\alpha = 0$, de vlieger heeft dan zijn maximum hoogte en tilt dan zijn maximum lengte aan touw. De formules worden dan:

$$l_{max} = a \tan\beta$$

$$h_{max} = a\left(\frac{1}{\cos\beta} - 1\right)$$

Tot slot wil ik nog graag een rekenvoorbeeld geven ter bevordering van de duidelijkheid.
Stel η = 0,02 N/m, en ik laat met dit touw een vlieger met 100 m lengte op. Met een veerunster kreeg ik de aanwijzing van 1,0 kg dus F = 1,0 x 9,8 = 9,8 N.
Het touw ging onder een hoek van 45° staan dus α = 45°.
We berekenen nu:

$$a = \frac{F \cos\alpha}{\eta} = \frac{9{,}8 \text{ N. } \cos 45}{0{,}02 \text{ N/m}} = 346{,}5 \text{ m.}$$

$$\tan\beta = \frac{1}{a} + \tan\alpha = \frac{100 \text{ m}}{346 \text{ m}} + \tan 45 = 1{,}2886$$

$$\beta = \text{arc tan } 1{,}2886 = 52{,}19°$$

De vlieger staat nu dus op een hoogte van

$$h = 346{,}5 \text{ m} \left(\frac{1}{\cos 52{,}19°} - \frac{1}{\cos 45}\right) = 75 \text{ m.}$$

De maximale hoogte en lengte wordt dan

$$h_{max} = 346{,}5 \text{ m} \left(\frac{1}{\cos 52{,}19°} - 1\right) = 219 \text{ m.}$$

$$l_{max} = 346{,}5 \text{ m. } \tan 52{,}19° = 446 \text{ m.}$$

Willen we nog berekenen hoe hoog de vlieger staat wanneer α = 20° dan gaat dit als volgt:

$$h = 346{,}5 \left(\frac{1}{\cos 52{,}19°} - \frac{1}{\cos 20°}\right) = 196 \text{ m.}$$

$$l = 346{,}5\,(\tan 52{,}19° - \tan 20°) = 320 \text{ m.}$$

Bij al deze berekeningen wordt verondersteld dat de windsnelheid op elke hoogte gelijk is en dat de wind geen invloed op het touw heeft.

Rudi Slomp, Borger

Grote vliegers vangen veel wind. (oude volkswijsheid).